Prof. Dr. F. W. Knöller **SS 2008**

1. Übungsblatt zur VL "Dynamische Systeme"

Abgabe: Mi., 11.4.2008, vor der VL

1.1.

Bekanntlich ist die Menge $\mathcal{C}$ der reellen 2×2-Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ bezüglich der üblichen Matrizenaddition und -multiplikation ein Körper.
Außerdem induziert $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib$ einen Körperisomorphismus $\mathcal{C} \cong \mathbb{C}$ auf den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
Folgere: $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \exp(a). \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$.
Skiziere die Kurven

$$t \mapsto \left(\exp t \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.

Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle, symmetrische, positiv-definite $n \times n$-Matrix.

Zeige:
Es gibt ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass

$$(1)\ {}^tB = B$$
$$(2)\ expB = P.$$

Folgere, dass P beliebige Wurzeln hat.
Ist $\exp S$ positiv-definit, falls ${}^tS = S$ eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix ist?